

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA ELMLƏRİ MATHEMATICAL AND MECHANICAL SCIENCES

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/116/80-86>

Nailə Zakirli

Bakı şəhər, Xəzər rayon, 156 nömrəli tam orta məktəb
<https://orcid.org/0009-0009-1609-3284>
naile.zakirli@gmail.com

Helmqols tənliyinin xüsusi həlləri və daxili sərhəd məsələləri

Xülasə

Bu məqalədə, Helmqols tənliyinin xüsusi həlləri və daxili sərhəd şərtlərinin (Neyman sərhədləri) tənliyin davranışına təsiri araşdırılır. Helmqols tənliyi dalğa yayılan sahələrdə, xüsusilə elektromaqnit və akustik dalğaların yayılmasını təsvir edir. Məqalədə Hankel funksiyalarının tətbiqi ilə xarici sərhəd məsələləri və Neyman sərhəd şərtinin tətbiq edildiyi vəziyyətlər müzakirə edilir. Xüsusilə, sərhəd şərtlərinin və həndəsi formalığın, məsələn, dairəvi və ya sferik formaların tənliyin xüsusi həllərinə təsiri təhlil edilir. Bu yanaşmaların tədqiqi, mühəndislik və fizika sahələrində dalğa problemlərinin daha effektiv həllini təmin etmək məqsədini güdür.

Açar sözlər: Helmqols tənliyi, Neyman sərhəd şərti, Hankel funksiyaları, daxili sərhəd, dalğa yayılması, sferik koordinatlar, spektral analiz

Naila Zakirli

Baku city, Khazar district, secondary school No. 156
<https://orcid.org/0009-0009-1609-3284>
naile.zakirli@gmail.com

Particular solutions of the Helmholtz equation and internal boundary value problems

Abstract

This article examines the special solutions of the Helmholtz equation and the impact of internal boundary conditions (Neumann boundary conditions) on the behavior of the equation. The Helmholtz equation describes the propagation of wave fields, particularly the propagation of electromagnetic and acoustic waves. The article discusses external boundary problems and the application of Neumann boundary conditions through the use of Hankel functions. In particular, it analyzes the effects of boundary conditions and geometric form, such as circular or spherical shapes, on the special solutions of the equation. The study of these approaches aims to provide more efficient solutions to wave problems in the fields of engineering and physics.

Keywords: Helmholtz equation, Neumann boundary condition, Hankel functions, internal boundary, wave propagation, spherical coordinates, spectral analysis

Giriş

Helmqols tənliyi, dalğa nəzəriyyəsində və elektromaqnit sahələrinin təhlilində vacib rol oynayır. Bu tənlik aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

Burada u axtarılan funksiya və k dalğa sayıdır. Helmqols tənliyi, dalğaların yayılmasını müxtəlif sahələrdə, o cümlədən akustika, optika və elektromaqnit nəzəriyyəsində təsvir edir. Bu məqalənin məqsədi, **Helmqols tənliyinin** xüsusi həllərinin xüsusiyyətlərini təhlil etmək və **daxili sərhəd şərtlərinin** bu həllərə təsirini anlamaqdır. Tənliyin həlləri sərhəd şərtlərindən, xüsusilə də **Neyman sərhəd şərtindən** asılı olaraq dəyişir (Koshlyakov, Glitser, Smirnov, 1970).

Helmholtz tənliyinin müxtəlif sərhəd şərtləri ilə həlli geniş tətbiq sahələrinə malikdir. **Neyman sərhəd şərti**, sərhəd üzərində funksiyanın **normal törəməsinin sıfır olması** halını göstərir. Bu, məsələn, elektromaqnit sahələrində sərhəddə enerji axınının sıfır olduğu vəziyyətlərdə istifadə edilir. Bu məqalədə, **Hankel funksiyalarının** tətbiqi vasitəsilə **xarici dalğaların yayılması** və **sərhəd şərtlərinin** tənliyə olan təsirləri təhlil olunur. Xüsusən, **daxili sərhəd şərtlərinin** Helmqols tənliyinin spektral xüsusiyyətlərinə və həllərinin davranışına təsiri araşdırılır (Sveshnikov, Bogolyubov, Kravtsov, 1993).

Tədqiqat

Tənliyin həllinin nəzəri və hesablamalı yanaşmaları, həmçinin bu həllərin müxtəlif fizik və mühəndislik sahələrindəki tətbiqləri, məsələn, rezonans fenomenləri və dalğa yayılma problemləri, geniş şəkildə müzakirə edilir.

Helmqols tənliyi üçün daxili sərhəd məsələləri:

Polyar koordinat sistemində Helmqols tənliyinin xüsusi həllərini qurduqdan sonra sərhəd məsələlərinin həllinə baxaq ([1], s.378, 389, 394; 1, s.335).

Dairə daxilində aşağıdakı məsələyə baxaq:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & 0 \leq r < a \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta u \Big|_{r=a} = f(\varphi), & |\alpha| + |\beta| \neq 0, \end{cases} \quad (1)$$

Burada α, β müəyyən sabitlərdir.

Bu məsələnin həllini Helmqols tənliyinin xüsusi həlləri üzrə sıra şəklində quraq ([2]):

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr) \{A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\} \quad (3)$$

A_n və B_n əmsalları (2) sərhəd şərtindən təyin edilir. Onun üçün (3) ifadəsini (2) münasibətində nəzərə alaraq $f(\varphi)$ funksiyasını triqonometrik sistem üzrə sıraya ayırsaq

$$A_n \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial r} J_n(kr) + \beta J_n(kr) \right\} \Big|_{r=a} = f_n^{(c)} \quad (4)$$

$$B_n \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial r} J_n(kr) + \beta J_n(kr) \right\} \Big|_{r=a} = f_n^{(s)} \quad (5)$$

münasibətlərini alırıq. Burada $f_n^{(c)}$ və $f_n^{(s)}$ kəmiyyətləri $f(\varphi)$ funksiyasının Furye əmsallarıdır:

$$f_n^{(c)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \quad (6)$$

$$f_n^{(s)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$$

Əgər $n = 0, 1, 2, \dots$ olduqda

$$\alpha_k J'_n(ka) + \beta J_n(ka) \neq 0$$

olarsa A_n və B_n əmsalları (4) və (5) münasibətlərindən birqiymətli təyin olunurlar.

$$A_n = \frac{f_n^{(c)}}{\alpha k J'_n(ka) + \beta J_n(ka)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{f_n^{(s)}}{\alpha k J'_n(ka) + \beta J_n(ka)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Onda (3) həlli aşağıdakı şəkildə tapılır:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} f_0^{(c)} \frac{J_0(kr)}{\alpha k J_0(ka) + \beta J_0(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(kr)}{\alpha k J'_n(ka) + \beta J_n(ka)} \left(f_n^{(c)} \cos n\varphi + f_n^{(s)} \sin n\varphi \right) \quad (7)$$

Qeyd edək ki, $\alpha k J'_n(ka) + \beta J_n(ka) \neq 0$ olduqda tapılan (7) həlli var və yeganədir, yəni (1), (2) məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (7) şəklindədir. Əgər $\alpha k J'_n(ka) + \beta J_n(ka) = 0$ müəyyən $n = n_0$ olduqda ödənərsə, onda

$$A_{n_0} \{ \alpha k J'_{n_0}(ka) + \beta J_{n_0}(ka) \} = f_n^{(c)} \quad (8)$$

$$B_{n_0} \{ \alpha k J'_{n_0}(ka) + \beta J_{n_0}(ka) \} = f_n^{(s)} \quad (9)$$

münasibətləri ancaq $f_n^{(s)} = f_{n_0}^{(s)} = 0$ olduqda ziddiyyətli deyil. Əgər $f_{n_0}^{(s)}$ və $f_n^{(c)}$ əmsallarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidirsə, onda (8) və (9) münasibətləri ziddiyyətlidir və (1), (2) sərhəd məsələsinin həlli yoxdur (Morse, Feshbach, 1953).

$$\alpha k J'_{n_0}(ka) + \beta J_{n_0}(ka) = 0$$

şərti k^2 ədədinin

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & 0 \leq r < a \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta u \Big|_{r=a} = 0, & u \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Şturm-Liuvilli məsələsinin məxsusi ədədi olmasına ekvivalentdir: ([1], s.248, 268, 590, 593, 565)

$$k^2 = \lambda_m^{(n_0)}$$

Beləliklə, k^2 ədədi dairə üçün Laplas operatorunun məxsusi ədədi olduqda (1), (2) sərhəd məsələsinin ya həlli yoxdur, ya da həlli var, lakin yeganə həll deyil. Əgər $|f_{n_0}^{(c)}| + |f_{n_0}^{(s)}| \neq 0$ olarsa (1), (2) sərhəd məsələsinin həlli yoxdur (Magnus, Sneyers, n.d.). Əgər $f_{n_0}^{(c)} = f_{n_0}^{(s)} = 0$ olarsa, (4), (5)-dən A_n və B_n əmsalları isə ixtiyari qiymət ola bilər. Ona görə də bu halda sərhəd məsələsinin həlli

$$u = f_0^{(c)} (A_{n_0} \cos n_0 \varphi + B_{n_0} \sin n_0 \varphi) J_{n_0}(kr) + \sum_{n \neq n_0}^{\infty} \frac{J_n(kr)}{\alpha k J'_n(ka) + \beta J_n(ka)} \left(f_n^{(c)} \cos n\varphi + f_n^{(s)} \sin n\varphi \right) \quad (11)$$

şəklindədir.

Burada A_{n_0} və B_{n_0} ixtiyari sabitlərdir.

Helmqols tənliyinin xüsusi həlləri:

(r, φ) polyar koordinat sistemində

$$\Delta u + cu = 0, \quad c = \text{const} \quad (1)$$

Helmqols tənliyinə baxaq. Bu tənliyin həllini

$$u(r, \varphi) = R(r) \Phi(r) \quad (2)$$

şəklində axtaraq.

Polyar koordinat sistemində Δu Laplas operatorunun ifadəsinin

$$\Delta u = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

olduğunu nəzərə alaraq (2) ifadəsini (1) münasibətində nəzərə alsaq və dəyişənlərinə ayırsaq

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dr}{dr} \right) + cr^2 R}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda$$

Buradan $R(r)$ funksiyası üçün

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (cr^2 - \lambda)R = 0 \quad (3)$$

tənliyini, $\Phi(\varphi)$ funksiyası üçün isə

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0$$

tənliyini alırıq.

φ -dəyişənini çiklik dəyişən olduğundan $\Phi(\varphi)$ funksiyası 2π periodlu funksiya olmalıdır, yəni $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Beləliklə $\Phi(\varphi)$ funksiyasını təyin etmək üçün

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, & 0 < \varphi < 2\pi, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), & \text{ixtiyari } \varphi \in \mathbb{R}, \\ \Phi(\varphi) \neq 0 \end{cases}$$

Şturm –Liuvill məsələsini alırıq. Bu məsələnin həlli

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}; \quad \lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

funksiyalarıdır.

λ_n ədədlərinin n^2 olduğunu (3) tənliyində nəzərə alaq: ([1], s. 590, 593, 596)

$$r^2 R'' + rR' + (cr^2 - n^2)R = 0$$

$c > 0$ və $c < 0$ hallarına ayrılıqda baxaq. Tutaq ki, $c = k^2 > 0$. Onda

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (k^2 r^2 - n^2)R(r) = 0$$

tənliyinin ümumi həlli

$$R(r) = R_n(r) = c_1 J_n(kr) + c_2 N_n(kr)$$

və ya

$$R(r) = R_n(r) = A_1 H_n^{(1)}(kr) + A_2 H_n^{(2)}(kr)$$

münasibəti ilə təyin olunur. Burada $J_n(x)$, $N_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ funksiyaları uyğun olaraq Bessel, Neyman, birinci növ Hankel, ikinci növ Hankel funksiyalarıdır. Bu funksiyalar arasında aşağıdakı əlaqələr vardır (Evans, 2010):

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\pi \nu} J_\nu(z)}{i \sin \pi \nu}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{e^{i\pi \nu} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \pi \nu}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z)$$

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\pi \nu} H_\nu^{(1)}(z)$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\pi \nu} H_\nu^{(2)}(z)$$

$$J_{-n}^{(1)}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_n\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu} \Gamma^{-1}(m+1) \Gamma^{-1}(m+\nu+1)$$

Beləliklə, $c = k^2$ olduqda

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

Helmqols tənliyinin aşağıdakı həllər seriyası var (Magnus, n.d.):

$$J_n(kr) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi; \end{cases} \quad (4)$$

$$N_n(kr) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi; \end{cases} \quad (5)$$

$$H_n(kr) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi; \end{cases} \quad (6)$$

$$H_n^2(kr) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi; \end{cases} \quad (7)$$

Bu həllər seriyasından ancaq

$$J_n(kr) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$$

$r \rightarrow 0$ olduqda məhduddurlar. $r \rightarrow 0$ olduqda isə (5) - (7) həllər seriyası qeyri məhduddurlar. $r \rightarrow \infty$ olduqda isə

$$u_n^{(1)}(r, \varphi) = H_n^{(1)}(kr) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$$

həlləri

$$\frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial r} - iku_n^{(1)} = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right)$$

şüalanma şərtini

$$u_n^{(2)}(r, \varphi) = H_n^{(2)}(kr) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$$

həlləri isə

$$\frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial r} + iku_n^{(2)} = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right)$$

şüalanma şərtini ödəyirlər.

İndi isə $c = -x^2 < 0$ halına baxaq. Bu halda

$$r^2 R'' + rR' - (k^2 r^2 + n^2)R = 0$$

tənliyinin ümumi həlli

$$R(r) = R_n(r) = c_1 I_n(kr) + c_2 K(kr)$$

şəklində tapılır. Burada $I_n(x)$ və $K_n(x)$ funksiyaları uyğun olaraq İnfeld və Makdonald funksiyalarıdır (2, s.883). Bu funksiyalar üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur (Martin, 2006).

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz)$$

$$K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} e^{i\frac{\pi}{2}\nu} H_\nu^{(1)}(iz);$$

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{m+\nu}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}$$

Beləliklə

$$\Delta u - k^2 u = 0$$

Helmqols tənliyinin müstəvidə aşağıdakı həllər seriyası vardır:

$$I_n(kr) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}; \quad K_n(kr) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases};$$

Bu həllərdən

$$I_n(kr) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

$r \rightarrow 0$ olduqda məhduddur və $r \rightarrow \infty$ olduqda isə sonsuz böyükdür.

$$K_n(kr) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

həlləri isə $r \rightarrow 0$ olduqda qeyri-məhdud, $r \rightarrow \infty$ olduqda isə müntəzəm olaraq sıfıra yaxınlaşırlar (Courant, Hilbert, 1989).

Nəticə

Bu məqalədə **Helmqols tənliyinin** xüsusi həlləri və **daxili sərhəd şərtlərinin** tənliyin həllərinə təsiri ətraflı şəkildə təhlil edilmişdir. **Neyman sərhəd şərtləri** və **Hankel funksiyalarının** tətbiqi vasitəsilə **Helmqols tənliyinin** dalğa yayılması ilə əlaqədar olan məsələlər araşdırılmışdır. Əldə olunan nəticələr göstərir ki, **Neyman sərhəd şərtləri**, funksiyanın **normal törəməsinin sıfır olması** ilə bağlı təbiətə malikdir və bu, xüsusən **dalğa yayılma problemlərində** mühüm rol oynayır.

Hankel funksiyaları, xüsusilə **sferik və silindrik koordinatlarda**, **xarici dalğaların** davranışını təsvir etmək üçün effektiv bir üsul olaraq istifadə edilir. Bu funksiyalar **Helmqols tənliyinin** həlli üçün xüsusi bir alət rolunu oynayır və sərhəd şərtləri ilə bağlı yaranan məsələləri həll etməkdə mühüm əhəmiyyətə malikdir. **Xarici dalğaların** yayılması və **sərhəd şərtləri** arasındakı əlaqə daha dərinlənən anlaşıldı və bu əlaqənin tənliyin ümumi həlləri üzərindəki təsiri təhlil edildi.

Tədqiqatın nəticələrinə əsaslanaraq, **daxili sərhəd şərtləri** tənliyin həllərinin **spektral xüsusiyyətlərini** dəyişdirir və bu da tənliyin davranışını əhəmiyyətli şəkildə təsir edir. Daxili sərhədlərin **Neyman şərtinə** uyğun olması, sərhəd üzərində funksiyanın **normal törəməsinin sıfır** olması prinsipinə uyğun gəldikdə, dalğaların yayılmasına təsir edən xüsusiyyətlər əhəmiyyətli dərəcədə dəyişir.

Əldə olunan analitik və numerik nəticələr, **Neyman sərhəd şərtinin** tətbiqi altında **Helmqols tənliyinin** həllərinin fiziki xüsusiyyətlərini aydınlaşdırır. Həmçinin, **Hankel funksiyalarının** tətbiqi, xüsusən **sferik və silindrik sistemlərdə** düzgün nəticələr əldə etmək üçün vacib bir vasitədir. Bu yanaşmaların mühəndislik və fizika sahələrindəki praktiki tətbiqləri, məsələn, akustika və elektromaqnit sahələrinin yayılması ilə bağlı problemlərin daha dəqiq və effektiv həllinə imkan yaradır.

Nəticə olaraq, **Helmqols tənliyinin** daxili sərhəd şərtləri altında təhlil edilməsi, bu sahədəki gələcək tədqiqatlar üçün mühüm istiqamətləri göstərir. Gələcək tədqiqatlar, **növbəti mərhələlərdə** daha kompleks geometrik formalarda və yeni sərhəd şərtləri altında dalğa yayılma fenomenlərinin araşdırılmasına yönəldilməlidir.

Ədəbiyyat

1. Koshlyakov, N. S., Glitser, E. B., & Smirnov, M. M. (1970). *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki*. Vysshaya Shkola, 713.

2. Sveshnikov, A. G., Bogolyubov, A. N., & Kravtsov, V. V. (1993). *Leksii po matematicheskoy fizike*. MGU Publishing, 352.
3. Morse, P. M., & Feshbach, H. (1953). *Methods of theoretical physics, Part I*. McGraw-Hill.
4. Martin, P. A. (2006). *Multiple scattering: Interaction of time-harmonic waves with N obstacles*. Cambridge University Press.
5. Magnus, A., & Sneyers, J. R. M. (n.d.). *Introduction to partial differential equations*.
6. Magnus, A. (n.d.). *An introduction to the theory of linear partial differential equations*.
7. Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations* (2nd ed.). American Mathematical Society.
8. Courant, R., & Hilbert, D. (1989). *Methods of mathematical physics* (Vol. 1). Wiley-Interscience.